Cuadernos de Economía. Vol. 23 3-22 1995.

# Inversión y reducción de la polución con impuestos y subvenciones. Juego diferencial de la interacción Firma-Gobierno.(*)

**Albert Biayna Mulet**
*Universidad de Barcelona*


ABSTRACT

El trabajo trata de las interacciones dinámicas entre las empresas y el gobierno.

Se describe la acción de la política tributaria y medio ambiental del gobierno y la reacción de las empresas al decidir el uso que hacen de su beneficio después de impuestos.

Se analiza su influencia recíproca y el impacto de ambos sobre la dinámica del sistema.

Se modeliza el supuesto en el que el gobierno, con el propósito a largo plazo de maximizar la suma de la recaudación, actúa en el impuesto sobre el beneficio y además usa dos instrumentos de política medio ambiental como son: el impuesto sobre la polución que grava las emisiones de polución y desgrava la reducción de la misma, y las subvenciones para estimular la inversión en tecnología de producción más limpia y/o actividades abatidoras de la polución, mientras que las empresas, buscando maximizar su valor a largo plazo para los accionistas, deciden acerca de: pagar dividendos o invertir en bienes de capital productivo y que poluciona o bien invertir en bienes de capital que desarrollan una actividad reductora de polución.

El modelo se formaliza matemáticamente, en el ámbito de la dinámica, con metodología deductiva y con técnicas deterministas. Es un juego diferencial de suma no nula de dos personas. Se emplea el tipo de solución de Nash de equilibrio no coopera-


(*) El presente artículo es una versión de la ponencia presentada en el III Congreso de Matemática de las Operaciones Financieras, Las Palmas de Gran Canaria, 25, 26 y 27 de Octubre de 1995.

tivo con circuito abierto. Para la obtención de solución se utiliza la teoría del control óptimo y el enfoque del principio del máximo de Pontryaguin para el desarrollo de las condiciones de optimalidad.

**Palabras clave:**
1. Control óptimo. 2. Inversiones abatidoras de polución. 3. Impuesto sobre la polución. 4. Juego diferencial. 5. Subvenciones a la reducción de polución. 6. Teoría de la Firma.

## 1. Conceptos preliminares

El modelo dinámico del interjuego Firma-Gobierno, que dirime entre las decisiones inversoras de las empresas y las medidas de política tributaria y medio ambiental del Gobierno, se construye bajo los siguientes supuestos, conceptos y relaciones.

Las empresas pueden ser representadas por una de ellas, que denominamos la Firma.

La Firma representativa produce un output y opera con tecnología de producción de rendimientos de escala constantes tipo Cobb-Douglas.

Se da una estructura de mercados en equilibrio entre demanda y producción, en todo momento el nivel de producción es igual al nivel de ventas.

**El beneficio antes de impuestos** de la Firma se halla a partir del rendimiento sobre las ventas menos la depreciación del stock de bienes de capital menos los intereses de la deuda:

$$P = qK - aK - rY = (q - a - ry)\,K = \pi K \qquad (1)$$

$$K \geq 0,\ Y \geq 0,\ X \geq 0,\ a \geq 0,\ 0 \leq y < 1,\ 0 < r < 1$$

$K(t)$ = stock de bienes de capital
$q$ = rentabilidad del stock de bienes de capital
$a$ = tasa de depreciación del stock de bienes de capital
$r$ = tanto de interés sobre la deuda
$Y(t)$ = stock de deuda
$y$ = tasa de deuda sobre stock de bienes de capital, $Y = yK$
$t$ = tiempo
$P(t)$ = beneficio antes de impuestos

$\pi = P/K = q - a - ry$ = beneficio unitario antes de impuestos

Seguidamente hacemos algunas consideraciones sobre los componentes de este concepto.

El rendimiento sobre las ventas, expresa el resultado de explotación antes de amortización e intereses, y aceptamos que es una relación lineal del stock de bienes de capital R(t) = qK(t), donde q representa la rentabilidad del stock de bienes de capital después de deducidos los costes unitarios de producción, primeras materias y energía y los laborales.

Con la deducción de la depreciación del stock de bienes de capital, asumimos que la depreciación aK es proporcional al stock, siendo la tasa de depreciación a una constante no negativa, y obtenemos el beneficio operativo o de explotación después de la amortización de capital antes de intereses de la deuda.

La referencia a los intereses de la deuda requiere la siguiente explicación previa.

Respecto a la estructura financiera de la Firma representativa, en el modelo el único activo es el de bienes de capital, aceptamos que la Firma al invertir puede financiar sus activos de bienes de capital con recursos propios y deuda.

Se cumple la ecuación:

$$X + Y = K \tag{2}$$

X= stock de recursos propios
Y= stock de deuda
K= stock de bienes de capital

La relación entre los recursos propios y los recursos ajenos está limitada por la restricción del montante de la deuda siguiente:

$$Y = yK \quad , \quad 0 \leq y < 1 \tag{3}$$

y = tasa de deuda sobre el stock de bienes de capital

Los intereses de la deuda para financiar la inversión de bienes de capital de la firma con recursos ajenos ascienden a:

$$rY = ryK \tag{4}$$

r = tanto de interés sobre la deuda, constante entre 0 y 1.

Al restar los intereses de la deuda, encontramos el beneficio de explotación después de amortización e intereses, antes de impuestos P (1).

La correspondiente magnitud relativa es el **beneficio antes de impuestos por unidad de capital**:

$$\pi = \frac{P}{K} = q\text{-}a\text{-}ry \tag{5}$$

**El impuesto sobre el beneficio** de la firma es proporcional al beneficio:

$$TXP = fP = f\pi K = f(q\text{-}a\text{-}ry)\ K \tag{6}$$

f = tipo del impuesto sobre el beneficio, $0<f<1$

**El beneficio después del impuesto sobre el beneficio es:**

$$P\text{-}fP = P(1\text{-}f) = \pi\,(1\text{-}f)\,K = (q\text{-}a\text{-}ry)\,(1\text{-}f)\,K \tag{7}$$

**Emisiones de polución**

En el modelo se incorporan dos instrumentos gubernamentales de política medio ambiental: uno es el impuesto sobre la polución y el otro las subvenciones a las tecnologías de producción más limpia y a las actividades reductoras de la polución.

Al respecto hay que señalar que la Firma representativa produce un output mediante una actividad que a causa de gases y residuos industriales contamina la atmósfera y el medio ambiente, pero la Firma puede también efectuar inversiones limpiadoras de polución. Y asumimos que la polución se puede abatir invirtiendo en una segunda clase de bienes de capital no productivos pero que desarrollan una actividad reductora de la polución.

El cálculo del impuesto sobre polución implica conocer y determinar la base del mismo, por ello seguidamente nos referimos al concepto de emisión de polución.

Definimos el montante de las emisiones de polución como una función de las dos clases de stocks de bienes de capital mencionadas

$$E = e_1K_1\text{-}e_2K_2 \tag{8}$$

Además aceptamos que no hay bienes de capital no usados, todos están asignados a alguna de estas dos actividades

$$K(t) = K_1\,(t) + K_2\,(t) \tag{9}$$

A los efectos del cálculo del impuesto sobre la polución en t, convenimos establecida su proporción

$$\frac{K_2\,(t)}{K\,(t)} = l \quad , \quad \frac{K_1\,(t)}{K\,(t)} = 1 - l$$

con lo que sustituyendo en (8), el montante de las emisiones de polución puede expresarse como:

$$E = e_1K_1\text{-}e_2K_2 = [\; e_1\,(1\text{-}l) - e_2 l\;]\;K = \varepsilon K \tag{10}$$

donde

$E$ = montante de las emisiones de polución

$K_1$ = stock de bienes de capital productivo y que poluciona

$K_2$ = stock de bienes de capital que abate la polución

$e_1$ = tasa de emisión de polución relativa al capital
$e_2$ = tasa de abatimiento de polución relativa al capital
$l$ = tasa unitaria de capital reductor de polución
$1-l$ = tasa unitaria de capital productivo y que poluciona
$\varepsilon$ = emisión de polución por unidad de capital

La correspondiente magnitud relativa es la emisión de polución por unidad de capital

$$\varepsilon = \frac{E}{K} = e_1 (1-l) - e_2 l \qquad (11)$$

**El impuesto sobre la polución** suponemos que es proporcional a la emisión de polución

$$TXE = \tau E = \tau\varepsilon K = \tau [ e_1 (1-l) - e_2 l ] K \qquad (12)$$

$\tau$ = tipo del impuesto sobre la polución, $0 < \tau < 1$

**Beneficio después de impuestos** sobre el beneficio y sobre la polución

$$B = P\text{-}TXP\text{-}TXE$$

sustituyendo de (1), (6), (12) tenemos

$$B = P\text{-}fP\text{-}\tau E = \{ (q\text{-}a\text{-}ry) (1\text{-}f) - [ e_1 (1-l) - e_2 l ] \tau \} K = [ \pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau ] K \qquad (13)$$

Los símbolos se especifican en (1), (6), (10), (12)

La correspondiente magnitud relativa es el **beneficio después de ambos impuestos** (sobre el beneficio y sobre la polución) **por unidad de capital**

$$\beta = \frac{B}{K} = (q\text{-}a\text{-}ry) (1\text{-}f) - [ e_1 (1-l) - e_2 l ] = \pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau \qquad (13')$$

**Inversión o Dividendo**

La Firma decide sobre la retención o la distribución del beneficio y asumimos que el beneficio después de impuestos (tanto sobre el beneficio como sobre la polución) puede ser usado para la inversión en bienes de capital o para el pago de dividendos a sus accionistas

$$P\text{-}TXP\text{-}TXE = I+D$$

$$B = I+D \tag{14}$$

La firma controla la administración de esta decisión a través de la tasa de inversión i

$$I = iB \tag{15}$$

$$D = (1\text{-}i)\, B \tag{16}$$

$$0 \leq i \leq 1 \quad , \quad I \geq 0 \quad , \quad D \geq 0$$

donde,
I(t) = inversión
D(t) = dividendo
i = tasa de inversión relativa por unidad de beneficio

El desarrollo de I, D con detalle de las componentes se obtiene sustituyendo de B de (13).

**Subvenciones**

Retomamos ahora al segundo de los instrumentos de política medio ambiental, antes mencionado, el de las subvenciones a la inversión en capital y actividades reductores de la polución, que modelizamos como si el Gobierno tuviese la posibilidad de devolver a la Firma un cierto montante de los impuestos pagados, siempre que la Firma se comprometiese a continuar invirtiendo.

Para el Gobierno equivale a una menor recaudación de impuestos, para la firma significa una mayor inversión y un menor valor de la empresa, si tuviese que devolver el capital subvencionado al acabar la actividad.

La subvención gubernamental a las empresas que invierten en bienes de capital y actividades reductoras de la polución es proporcional y evaluada en el momento inicial de su concesión, responde a la expresión:

$$sI\,(t) = gI_2 = \alpha g I = \gamma\, I \tag{17}$$

Su desarrollo por componentes se obtiene sustituyendo de *I* de (15), B de (13).
g = tasa de subvención a la inversión abatidora de polución.
$I_2$ = Inversión en bienes de capital que desarrollan actividades reductoras de la polución.

Convenimos establecida la proporción de la inversión en bienes de capital que abaten la polución $I_2$ respecto de la inversión total de la Firma *I* en t:

$$I_2\,(t) = \alpha\, I\,(t) \tag{18}$$

es decir,

$$\alpha = \frac{I_2\,(t)}{I\,(t)} = \text{tasa unitaria de inversión reductora de polución en el momento t}$$

Relacionando ésta, con la tasa de subvención, g, tenemos,

$$\gamma = \alpha\, g \tag{19}$$

$\gamma$ = tasa unitaria de subvención de la inversión abatidora de polución respecto de la inversión total en t.

Por último, el stock de bienes de capital subvencionado a devolver al acabar la actividad en el momento final T es:

$$sK(T) = gK_2(T) = \omega gK(T) = \frac{\omega}{\alpha}\,\gamma\, K(T) = \chi\gamma\, K(T) \tag{20}$$

Convenimos establecida la proporción del stock de bienes de capital reductor de polución $K_2$ respecto al stock total *K*, en el momento final *T*, a los efectos de devolución de subvención:

$$K_2\,(T) = \omega K(T) \tag{21}$$

esto es:

$$\omega = \frac{K_2\,(T)}{K\,(T)} = \text{tasa unitaria de capital reductor de polución a devolver en el momento } T.$$

Relacionando ésta, con la tasa unitaria de inversión reductora de polución en t, $\alpha$ ,tenemos:

$$\chi = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{K_2\,(T)\,/\,K\,(T)}{I_2\,(t)\,/\,I\,(t)} \tag{22}$$

$\chi$ = es el cociente de estas dos tasas y opera como un factor que traslada el efecto relativo producido por la subvención en el momento de su concesión t al efecto relativo de la devolución del capital que sucederá en el momento de acabar la actividad T.

## 2. Dinámica económico-financiera

El flujo financiero del consumo público.

El Gobierno, con el control dinámico de los mencionados instrumentos de política financiera y medio ambiental (f, $\tau$, $\gamma$) pretende influir en la trayectoria inversora de las empresas, especialmente hacia actividades reductoras de polución, para conseguir a largo plazo en horizonte temporal finito, maximizar el valor inicial del consumo público que suponemos financia sin déficit presupuestario con la recaudación.

Consiste en el valor inicial del flujo financiero temporal, cuya función de intensidad está constituida por los ingresos públicos conseguidos con los impuestos sobre el beneficio y sobre la polución menos las subvenciones del gobierno a las empresas inversoras en actividades y capital que abaten la polución.

$$G(t) = TXP(t) + TXE(t) - sI(t)$$

que podemos desarrollar sustituyendo de (6), (12), (17).

Valorando al tanto instantáneo de interés $\sigma$

$$\int_0^T G(t)\, e^{-\sigma t}\, dt \qquad (23)$$

**El valor de la empresa**

Por su lado, la Firma representativa, con el control del uso de su propio beneficio después de impuestos decide acerca de invertir o pagar dividentos, e intenta influir en el Gobierno para que suavice la tendencia de su política tributaria, con el propósito a largo plazo en horizonte temporal finito de maximizar el valor de la empresa.

Este se define como el valor inicial del flujo financiero temporal cuya función de intensidad es la corriente de pagos de dividendos, valorado al tanto instantáneo de interés $\rho$,

$$\int_0^T D(t)\, e^{-\rho t}\, dt \qquad (24)$$

que podemos desarrollar sustituyendo D de (16), B de (13), más el valor inicial al tanto $\rho$ del valor final de la empresa,

$$S[K(T)]\, e^{-\rho T} = bK(T)\, e^{-\rho T} \text{ [1]} \quad , \quad 0 \leq b < 1 \qquad (25)$$

1) Su derivada parcial respecto a K en T es igual a $\lambda$ (T), la variable de coestado en T, según la condición de transversalidad del problema de control óptimo de la Firma (34) (38).

$$\lambda(T) = e^{-\rho T} \left[ \frac{\partial S(K(t))}{\partial K(t)} \right]_{t=T}$$

Este último es igual a la diferencia entre el valor final de los activos y la suma de los montantes finales de la deuda y las subvenciones a reponer al dejar inactiva la actividad empresarial. Se obtiene por diferencia entre recursos propios y subvenciones.

$$S\,[\,K(T)\,] = bK(T) =$$

$$= X(T) - gK_2(T) = \{de(2)\ X = K\text{-}Y,\ de(3)\ Y = yK\} =$$

$$= K(T) - Y(T) - gK_2(T) = \{de(20)\ gK_2(T) = \chi\gamma\, K(T)\} =$$

$$= (1\text{-}y\text{-}\chi\gamma)\, K(T) \tag{26}$$

**La dinámica del sistema**

Firma y Gobierno influyen en la dinámica del sistema que el modelo recoge en la ecuación de estado. Esta, mediante una ecuación diferencial liñeal de primer orden, describe la evolución del stock de bienes de capital que aumenta a causa de la inversión y las subvenciones y disminuye con la amortización.

$$\dot{K} = I + gI_2 - aK = \{de(18)\ I_2 = \alpha I\} =$$

$$= I + \alpha gI - aK = \{de(19)\ \gamma = \alpha g\} =$$

$$= I\,(1+\gamma) - aK \tag{27}$$

que podemos desarrollar sustituyendo I de (15), B de (13).

Seguidamente formalizamos la construcción del modelo.

## 3. El Modelo

**Objetivo de la Firma:**

$$\mathrm{Max}_i\ J^F(i, f, \tau, \gamma) = \int_0^T D(t)\, e^{-\rho t}\, dt + bK(T)\, e^{-\rho T} =$$

$$= \int_0^T \{\ (q\text{-}a\text{-}ry)(1\text{-}f) - [\,e_1(1\text{-}l) - e_2 l\,]\,\tau\ \}\,(1\text{-}i)\,K(t)\,e^{-\rho t}\,dt +$$

$$+ (1\text{-}y\text{-}\chi\gamma)\,K(T)\,e^{-\rho T} =$$

$$= \int_0^T [\ \pi(1\text{-}f) - \varepsilon\tau\ ]\,(1\text{-}i)\,K(t)\,e^{-\rho t}\,dt + (1\text{-}y\text{-}\chi\gamma)\,K(T)\,e^{-\rho T} \tag{28}$$

**Objetivo del Gobierno:**

$$\mathrm{Max}_{f,\tau,\gamma}\ J^G(i, f, \tau, \gamma) = \int_0^T G(t)\, e^{-\sigma t}\, dt =$$

$$= \int_0^T < f\,(q\text{-}a\text{-}ry) + \tau\,[e_1\,(1\text{-}l) - e_2 l] -$$

$$- \{\,(q\text{-}a\text{-}ry)\,(1\text{-}f) - [\,e_1\,(1\text{-}l) - e_2 l\,]\,\tau\,\}\, i\gamma > K(t)\, e^{-\sigma t}\, dt =$$

$$= \int_0^T \{f\pi + \tau\varepsilon - [\pi\,(1\text{-}f) - \varepsilon\tau\,]\, i\gamma\,\}\, K(t)\, e^{-\sigma t}\, dt \qquad (29)$$

**Ecuación de Estado:**

$$\dot{K}(t) = < \{(q\text{-}a\text{-}ry)\,(1\text{-}f) - [e_1\,(1\text{-}l) - e_2 l]\,\tau\}\, i\,(1+\gamma) - a > K(t)\ ,\ K(0) = K_0$$

$$\dot{K} = \{[\,\pi\,(1\text{-}f) - \varepsilon\tau]\, i\,(1\text{-}\gamma) - a\}\, K\ ,\ K(0) = K_0 \qquad (30)$$

$$0 \le i \le 1\ ,\ 0 < f_1 \le f \le f_2 < 1\ ,\ 0 < \tau_1 \le \tau \le \tau_2 < 1\ ,\ 0 \le \gamma \le \overline{\gamma} \le 1$$

**Juego Diferencial**

El problema planteado es un juego diferencial de suma no nula de dos personas, la Firma representativa y el Gobierno. Estos no tienen los mismos intereses pero influyen en la dinámica del sistema, aunque ninguno de ellos impone su dominio sobre el otro.

Para resolverlo aplicamos el concepto de solución de Nash de equilibrio no cooperativo, elegimos como estructura de información la de circuito abierto, y para obtener las condiciones de optimalidad usamos el enfoque del Principio del Máximo de Pontryaguin.

## 4. Optimalidad para la Firma

El problema de la Firma es el siguiente problema de control óptimo:

Objetivo (28)
sujeto a la Ecuación de Estado (30) (31)

Para obtener las condiciones optimales de solución usamos el Principio del Máximo de Pontryaguin.

Definimos la función Hamiltoniana de la Firma $H^F$ y la variable de coestado de la Firma $\lambda$

$$H^F (K, i, f, \tau, \gamma, \lambda) = [\pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau] (1\text{-}i) Ke^{-\rho t} +$$

$$+ \lambda \{[\pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau] i (1+\gamma) -a\} K \qquad (32)$$

Definimos el valor corriente de la Hamiltoniana

$$H^F{}_C = e^{\rho t} H^F \qquad (33)$$

y el valor corriente de la variable de coestado

$$m = \lambda e^{\rho t} \qquad (34)$$

que se interpreta como el precio sombra no descontado del capital para la Firma.

Debido a la linealidad de la Hamiltoniana y de su valor corriente respecto de la variable de control de la Firma i, la solución tiene una estructura bang-bang.

Al ser $H^F$ y $H^F{}_C$ también lineal en la variable de estado K, las condiciones necesarias de optimalidad son además suficientes.

Estas condiciones son la maximización del valor corriente de la Hamiltoniana $H^F{}_C$ respecto a la variable de control i, la ecuación diferencial de estado de bienes de capital con su condición inicial de contorno, y la ecuación diferencial de coestado, valor corriente, de la Firma con su condición final de contorno, que nos dan:

- La función de reacción:

$$i = \{ {}^0_1 \} \text{ siempre que } [\pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau] K [-1+m(1+\gamma )] \{ {}^<_> \} 0 \qquad (35)$$

si $\pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau > 0 \quad K > 0$ , $H^F{}_C$ se maximiza con los valores de i:

$$i = \{ {}^0_1 \} \text{ siempre que } m \{ {}^<_> \} \frac{1}{1+\gamma} \qquad (36)$$

- La ecuación diferencial de estado:

$$\dot{K} = \frac{\partial H^F{}_C}{\partial m} = \{[\pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau] i (1\text{-}\gamma) - a\} K \quad , \quad K(0) = K_0 \qquad (37)$$

- y la ecuación diferencial de coestado, valor corriente:

$$\dot{m} = \rho m - \frac{\partial H^F_C}{\partial K} = \rho m - [\pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau] (1\text{-}i) -$$

$$- m \{[\pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau] i (1+\gamma) - a\} , \qquad m(T) = 1\text{-}y\text{-}\chi\gamma \tag{38}$$

## 5. Optimalidad para el Gobierno

El problema del Gobierno es el siguiente problema de control óptimo:

| | | |
|---|---|---|
| Objetivo | (29) | |
| sujeto a la Ecuación de Estado | (30) | (39) |

Para obtener las condiciones optimales de solución, usamos el Principio del Máximo de Pontryaguin.

Definimos la función Hamiltoniana del Gobierno $H^G$ y la variable de coestado del Gobierno $\psi$ , así como sus correspondientes valores corrientes.

El valor corriente dela Hamiltoniana del Gobierno es:

$$H^G_C (K, i, f, \tau, \gamma, n) = e^{\sigma t} H^G =$$

$$= \{f\pi + \tau\varepsilon - [\pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau] i\gamma\} K + n \{[\pi (1\text{-}f) - \varepsilon\tau] i (1+\gamma) - a\} K \tag{40}$$

donde n es el valor corriente de la variable de coestado del Gobierno:

$$n = \psi e^{\sigma t} \tag{41}$$

que significa el valor marginal no descontado del stock de bienes de capital para el Gobierno.

Debido a la linealidad de $H^G$ y $H^G_C$ respecto a las variables de control del Gobierno f, $\tau$, $\gamma$, la solución tiene una estructura bang-bang.

Por ser también $H^G$ y $H^G_C$ lineal en la variable de estado K, las condiciones necesarias de optimalidad son además suficientes.

Estas condiciones son la maximización del valor corriente de la Hamiltoniana $H^G_C$ respecto a las variables de control f, $\tau$, $\gamma$, la ecuación diferencial de estado de bienes de capital con su condición inicial de contorno y la ecuación diferencial de coestado, valor corriente, del Gobierno con su condición final de contorno, que nos dan:

- la función de reacción:

siendo $\pi > 0$ , $K > 0$

$$f = \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right\} \text{ siempre que } 1 + i\gamma - ni\,(1+\gamma) \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} 0 \tag{42}$$

siendo $\varepsilon > 0$ , $K > 0$

$$\tau = \left\{ \begin{matrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{matrix} \right\} \text{ siempre que } 1 + i\gamma - ni\,(1+\gamma) \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} 0 \tag{43}$$

siendo $\pi\,(1\text{-}f) - \varepsilon\tau > 0$ , $K > 0$ , $i > 0$

$$\gamma = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \overline{\gamma} \end{matrix} \right\} \text{ siempre que } n \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} 1 \tag{44}$$

-La ecuación de estado:

$$\dot{K} = \frac{\partial H^G{}_C}{\partial n} = \{[\pi\,(1\text{-}f) - \varepsilon\tau]\, i\,(1\text{-}\gamma) - a\}\, K \quad , \quad K(0) = K_0 \tag{45}$$

-y la ecuación diferencial de coestado, valor corriente:

$$\dot{n} = \sigma n - \frac{\partial H^G{}_C}{\partial K} = \sigma n - \{f\pi - \tau\varepsilon\text{-} [\pi\,(1\text{-}f) - \varepsilon\tau]\, i\gamma\} -$$

$$- n\,[\pi\,(1\text{-}f) - \varepsilon\tau]\, i\,(1+\gamma) - a\} , \qquad n\,(T) = 0 \tag{46}$$

## 6. Solución del Juego Diferencial

La solución del Juego Diferencial ha de cumplir las condiciones de optimalidad del Principio del Máximo de Pontryaguin, expuestas en la formulación del problema de la Firma y en el problema del Gobierno y recogidas en las funciones de reacción y las ecuaciones de estado y de coestado.

Las funciones de reacción de la estructura bang-bang informan de las posibles cuaternas (i, f, $\tau$, $\gamma$) formadas por los valores que pueden tomar cada una de las 4 variables de control, véase (36), (42), (43), (44).

Al analizar esta casuística, el modelo excluye aquellas estrategias que simultanean la no inversión con la banda baja de los impuestos, cualquiera que sea la subvención. También descarta la inversión sin subvención. Y rechaza, por imposible, la subvención sin inversión.

En consecuencia, la solución implica moverse en estrategias que conjugan:

– la inversión con la banda alta de los impuestos con subvención,
– o bien, inversión en banda baja de impuestos con subvención
– o contrariamente la no inversión acompañada de banda alta de impuestos sin subvención.

El deslinde entre la tributación sobre el beneficio y el impuesto sobre la emisión de polución, se regula en el modelo mediante las correspondientes variables de control f, $\tau$. Su análisis pone de manifiesto la especial misión que cumple la tasa unitaria de capital reductor de polución $K_2/K$, en el modelo simbolizada por *l*. Debe su importancia a que, si dicho parámetro aumenta, hace que el impuesto sobre la polución, mediante su cometido desagravador, cumpla sus efectos de abatir de las emisiones de polución a largo plazo.

Un efecto análogo acontece con la tasa unitaria de inversión reductora de polución $I_2/I$, que el modelo explícitamente recoge con $\alpha$, e implícitamente en la tasa unitaria de subvención a la inversión abatidora de polución $\gamma$.

Esta cumple la función del control de las subvenciones y la desvincula de la vertiente desgravadora del anterior impuesto.

El modelo también revela la importancia de otros parámetros en el análisis de las subvenciones, debido a que éstas se hacen más efectivas a largo plazo si son altos: la tasa a de amortización del capital, la tasa $\rho$ de preferencia por el tiempo de los accionistas y el tipo de interes r de la deuda.

La relación de esta última con los recursos propios o equivalentemente la tasa de deuda sobre capital y = Y/K es otro de los parámetros que facilitan el análisis dinámico de los resultados.

Para hallar las trayectorias temporales óptimas, se opera sobre las relaciones que ligan las variables de coestado $\lambda$, $\psi$ o sus valores corrientes m, n en las funciones de reacción.

Se calculan los puntos de switch en el tiempo donde cambia la variable de coestado o valor marginal del capital.

En estas llaves de cambio, también puede ocurrir que las variables de control salten de un extremo al otro de su región factible, lo que significaría un cambio de estrategia en los agentes.

Por fases, entre los puntos de switch, se resuelven las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de las variables de coestado de cada jugador con sus condiciones finales de contorno o condición de transversalidad, que en el problema de la firma indica: al final del plazo, en T, el precio sombra no descontado es igual al coeficiente unitario del valor final de la empresa,

$$m(T) = b = 1 - y - \chi\gamma \tag{47}$$

Y finalmente, en la resolución de la ecuación diferencial lineal de primer orden con condición inicial de contorno, que representa la ecuación de estado y describe la evolución del sistema, encontramos la expresión de la trayectoria temporal del stock de bienes de capital que toma la forma analítica de una función exponencial

$$K(t) = K_0^* \, e^{x(t-t^*)} \tag{48}$$

donde,

$t^*$ es el inicio de la fase temporal en que nos hallamos.

$K_0^*$ es el stock de bienes de capital en $t^*$.

x es el coeficiente de crecimiento exponencial de K.

$$x = \begin{cases} (q-a-ry)(1-f) - [e_1(1-l) - e_2 l]\,\tau\,(1+\gamma) - a, & \text{si } i=1 \\ -a & \text{si } i=0 \end{cases} \tag{49}$$

e indica el ritmo de cambio del stock de bienes de capital que crece con la inversión, a través de su dependencia de todas las componenentes q, a, r, y, f, $e_1$, $e_2$, l, $\tau$, del coeficiente de beneficio unitario neto después de los dos impuestos, también crece con las subvenciones, a través de su dependencia de la tasa unitaria $\gamma$ de subvención de la inversión reductora de polución, y decrece con la amortización a través de la tasa unitaria de depreciación del capital.

El esquema de funcionamiento es el siguiente: se activa una estrategia (i, f, $\tau$, $\gamma$), dentro de esta fase el stock de bienes de capital crece al ritmo x, el valor marginal no descontado del capital cambia hasta que se dispara el switch, entonces puede tener lugar un cambio de cuaterna, y se activa otra estrategia que hace crecer el capital K a otro ritmo, y se reproduce el proceso así sucesivamente.

## 7. Conclusiones

El trabajo desarrolla un Juego Diferencial que modeliza la interacción dinámica entre el Gobierno y la Firma representativa.

El modelo formula, dilucida y *dirime* el amplio *dilema* inversión y reducción de la polución versus impuestos y subvenciones.

El Gobierno desea la máxima recaudación de impuestos a largo plazo para financiar el consumo público, y también considera prioritaria la protección del medio ambiente y la reducción de la polución de la producción, para ello cuenta con el control de tres instrumentos: el impuesto sobre el beneficio, el impuesto sobre la polución que grava las emisiones y desgrava las reducciones de polución, y las subvenciones a las inversiones en capital y actividades que abaten la polución. Elegiría la estrategia con tasas altas de impuestos ofreciendo la concesión de subvenciones.

El anuncio de una política con un alto impuesto sobre la polución implica que la inversión productiva deviene menos atractiva para las empresas, puesto que más producción genera inevitablemente más polución y ésta es gravada duramente. Las empresas se sienten más estimuladas a disminuir su propia polución. Entonces las empresas invertirán menos y la recaudación decrecerá a corto plazo para recuperarse a largo plazo.

La no inversión implica que no hay subvención, por lo tanto la elección de la estrategia no inversión, altos impuestos, no subvención, significa que el stock de bienes de capital no crecerá sino que se depreciará, ésto hará cambiar su valor marginal o precio sombra para cada uno de los agentes, hasta que llegará un momento en el que en el modelo salte el indicador de cambio de estrategia. Es cuando:

O bien, la Firma cambia a invertir y el Gobierno mantiene los altos impuestos con subvención, y como la inversión implica subvención, la estrategia es inversión, altos impuestos, subvención. Entonces inversión y subvención harán crecer el stock de bienes de capital, por lo que cambiará el valor marginal del capital, hasta que salte el indicador de cambio de estrategia, y así sucesivamente.

O bien es el Gobierno que cambia a bajos impuestos para que la Firma invierta con subvención. El stock de bienes de capital crecerá, ésto modificará el valor marginal del capital, hasta que el indicador nos informe de cuando hay que cambiar de estrategia, y así sucesivamente. Si el Gobierno elige tasas de impuestos bajas ha de consumir menos ahora pero más en el futuro.

La Firma persigue el máximo valor inicial de la corriente de dividendos más el valor inicial del valor de la empresa al final del plazo, con el fin de mejorar el valor de la empresa para los accionistas a largo plazo, cuenta con el control de la inversión, y elige:

La estrategia invertir, altos impuestos, con subvención, con lo que paga menos dividendo ahora pero aumenta el stock de bienes de capital y por tanto el valor de la empresa a largo plazo y la posibilidad de poder pagar más dividendo en el futuro.

O bien la estrategia no invertir, altos impuestos, sin subvención.

Cambia de estrategia cuando se modifica su valor marginal del capital hasta cambiar el control.

Pasaría a la estrategia invertir, bajos impuestos, con subvención siempre que el Gobierno haya efectuado el cambio de altos a bajos impuestos, de conformidad con el análisis de su valor marginal del capital, y que solamente mantendrá si la Firma invierte.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{if}\tau\gamma & \rightarrow & K & \rightarrow & \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \\ \uparrow & \leftarrow & & \leftarrow & \downarrow \end{array}$$

En los dos problemas de control, de la Firma, y del Gobierno, integradores del modelo, las estrategias –dadas por las variables de control (i, f, $\tau$, $\gamma$) ésto es, inversión, impuesto sobre el beneficio, impuesto sobre la polución, subvenciones– influyen sobre el stock de bienes de capital –dado por la variable de estado K– cuya evolución también modifica los valores marginales del capital o precios sombras para la Firma y para el Gobierno –respectivamente dados por las variables de coestado $\lambda$, $\psi$ y sus valores corrientes m, n–.

Respecto a la pregunta *qué estrategias elegir y cuando hacerlo, la respuesta la hallamos en el modelo* a través de los valores de las variables de control y de los valores de las variables de coestado.

La efectividad del impuesto sobre la polución hay que buscarla a largo plazo y relacionándola con las inversiones abatidoras de polución $I_2$ y con el aumento de la tasa unitaria $l = K_2/K$ de stock de bienes de capital reductor de polución.

La efectividad de las subvenciones abatidoras de polución se percibe más si la depreciación y los intereses son altos. Alargan el plazo de inversión. Y su regulación depende de la tasa unitaria de inversión reductora de polución en el momento de la concesión t, $\alpha = I_2(t) / I(t)$, de la tasa de subvención g y de la tasa unitaria de capital reductor de polución a devolver en el momento final T, $\omega = K_2(T) / K(T)$.

El trabajo *avanza* en las lineas iniciadas y desarrolladas básicamente por Paul van Loon y Raymond Gradus en los artículos y ponencias por nosotros conocidos referenciados en la bibliografía.

Respecto a nuestros predecesores, nuestro trabajo *profundiza* en la teoría de la Firma, integrando, de forma endógena, la política dinámica de la empresa con la acción del Gobierno, en un juego diferencial. También *amplia* la linea de los enfoques interactivos[2] incorporando de forma simultanea por un lado, el impacto de los instrumentos de política financiera y medio ambiental del Gobierno (el impuesto sobre el beneficio, el impuesto sobre la polución y las subvenciones a las inversiones reductoras de polución), y por el otro lado, *extiende* la estructura financiera de la Firma al contemplar la posibilidad de la financiación de la inversión en bienes de capital con recursos ajenos, e incluye a la vez la depreciación de los bienes de capital. También introduce los tantos de interés de mercado o de preferencia por el tiempo en la actualización de los pagos que se formulan en los objetivos de Firma y Gobierno respectivamente.

El modelo *aporta* una representación de todo este proceso interactivo que permite el tratamiento de todos sus elementos, en extensión y en profundidad. Facilita un

2. La aportación inicial «el juego del capitalismo» es debida a Lancaster, K. (1973): «The Dynamic Inefficiency of Capitalism». Journal of Political Economy 81: 1092-1109.

*método* de análisis que esclarece y resuelve el problema. Se caracteriza por la *generalización* en cuanto a los conceptos y relaciones esenciales, que integra los más posibles y la *simplificación* en los detalles de sus componentes, lo cual favorece el cálculo.

Si el fin es aclarar el estudio de la interacción Firma-Gobierno, el medio para conseguirlo es la *teoría generalizada del control.*

El modelo es un juego diferencial de suma no nula de dos personas. Empleamos la solución de Nash[3] de equilibrio no cooperativo de circuito abierto. Para la obtención de las condiciones optimales de solución utilizamos el principio del máximo de Pontryaguin.

Sugiere ser una interesante aplicación económica de la teoría del control óptimo, teniendo en cuenta el significado económico y financiero de todos los elementos del modelo: funciones, variables y ecuaciones.

La hipótesis de proporcionalidad aceptada, en los rendimientos de las ventas, en la depreciación del capital, en la deuda, en la inversión unitaria reductora de polución, en el stock unitario de bienes de capital reductor de polución, cuya representación en el modelo viene dada por los parámetros q, a, y, $\alpha$, l, $\omega$, mantiene la generalidad de las nociones, que pueden modularse. Permite analizar y distinguir la amplia casuística dependiendo de la estructura productiva, la estructura financiera y los modos de producción (según contamine o limpie el medio ambiente). Y ofrece la simplificación de la linealidad de las Hamiltonianas respecto a las variables de control y de estado. Esta linealidad, facilita los cálculos, consigue que las condiciones del principio del Máximo de Pontryaguin sean necesarias y suficientes, y hace que las soluciones sean del tipo bang-bang[4].

Las funciones de reacción de la estructura bang-bang establecen las relaciones entre las variables de control, cuyos posibles valores determinan estrategias, y las variables de coestado o valores marginal del capital. Estas, evolucionan con la dinámica del stock de bienes de capital o variable de estado, y sus cambios activan la decisión de elección de estrategia.

Augura el progreso del conocimiento en el área de «Mathematical Economics and Finance» y en el ámbito de la teoría dinámica de la interacción entre agentes económicos. El trabajo prosigue, con la ampliación de las características del modelo para

3. John F. Nash es Premio Nobel de Economía 1994.

4. Al definir G= consumo público, si abandonásemos el supuesto de que se financia con la recaudación G = TXP + TXE - sI y definiéramos una función de utilidad u(G) del tipo lnG, se perdería la linealidad y desaparecería la estructura bang-bang.

Algo parecido pasaría si en la estructura productiva renunciáramos a la proporcionalidad de la rentabilidad del capital y sustituyéramos qK por una función de K.

profundizar en la consideración y contraste de aspectos tales como la actitud de los agentes, la dependencia entre ellos, sus expectativas racionales y la consistencia temporal del modelo, introduciendo alternativas en cuanto al tipo de solución dada al juego diferencial, con la incorporación del tipo de solución de equilibrio cooperativo de Pareto o bien con el empleo de Estrategias Stackelberg. La solución de equilibrio no cooperativo de Stackelberg con circuito abierto, en la que el líder resuelve su problema también usando el Principio del Máximo de Pontryaguin con las restricciones adicionales tales que la solución satisfaga las condiciones necesarias para resolver el problema del seguidor. O la estrategia feedback (circuito cerrado) de Stackelberg, en este caso es interesante para el líder plantear una política que dependa de las acciones de los seguidores.

## BIBLIOGRAFÍA

GRADUS, R. «The Reaction of the Firm on Governmental Policy: A Game-Theoretical Approach», in «Optimal Contral Theory and Economic Analysis 3». G. Feichtinger (ed.). 1988. Elsevier Science Publishers (North-Holland), pp. 265-290.

GRADUS, R. «A Differential Game Between Government and Firms: A Non-Cooperative Approach». 1989. Journal of Economics, Vol. 50, nº 3, pp. 237-256. Springer-Verlag.

GRADUS, R. «Optimal Dynamic Profit Taxation: The Derivation of Feedback Stackelberg Equilibria». 1991. Metroeconomica, Vol. 42, nº 1, pp. 157-177. Capelli Editore.

GRADUS, R. and KORT, P. «Optimal taxation on profit and pollution within a macroeconomic framework», in «Dynamic Economic Models and Optimal Control». G. Feichtinger (ed.). 1992. Elsevier Science Publishers (North-Holland), pp. 313-327.

JORGENSEN, S.; KORT, P. and VAN SCHIJNDEL, G. «Optimal Investment, Financing and Dividends. A Stackelberg Differential Game». 1989. Journal of Economic Dynamics and Control 13, pp. 339-377. North-Holland.

KORT, P.; VAN LOON, P. and LUPTACIK, M. «Optimal Dynamic Environmental Policies of a Profit Maximizing Firm». 1991. Journal of Economics, Vol. 54, nº 3, pp. 195-225. Springer-Verlag.

VAN LOON, Paul. «Investment grants and alternatives to stimulate industry and employment», in «Optimal Control Theory and Economic Analysis 2». G. Feichtinger (ed.). 1985. Elsevier Science Publishers (North-Holland), pp. 331-340.